



UNIWERSYTET
EKONOMICZNY
W POZNANIU



Agnieszka Lach

Czy dywersyfikacja portfela redukuje ryzyko ekstremalnych strat?

Does portfolio diversification reduce extremal losses?

4 kwietnia 2024

Instytut Informatyki i Ekonomii Ilościowej
Katedra Badań Operacyjnych i Ekonomii Matematycznej



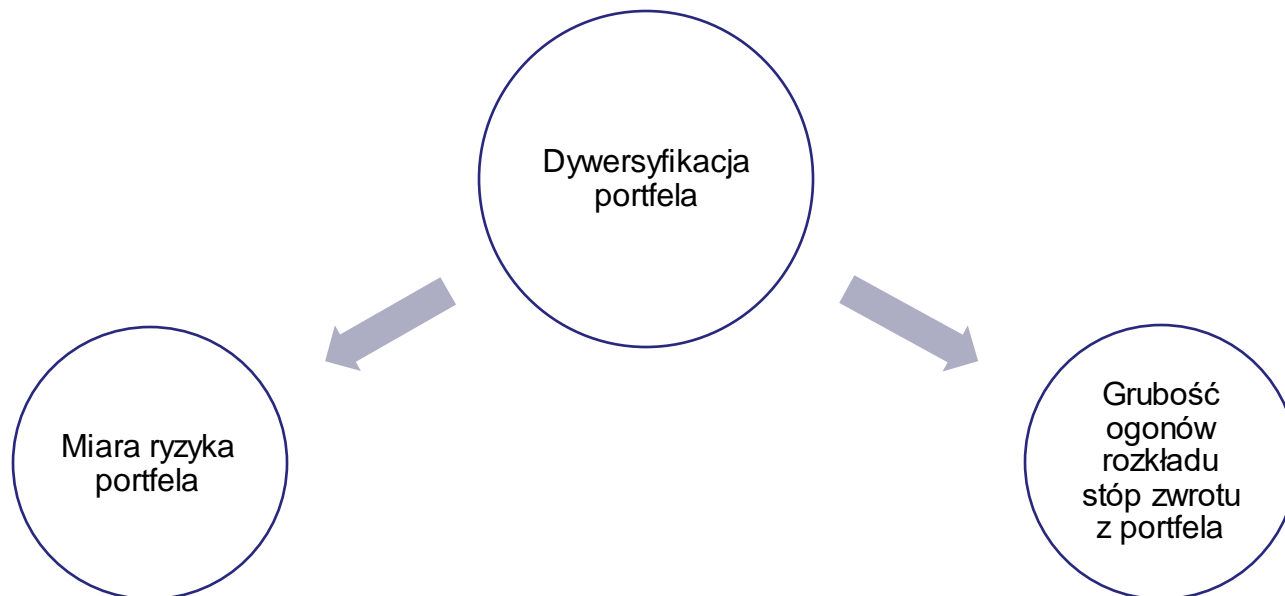
Plan prezentacji

1. Badania empiryczne (Eom et al., 2021)
2. Stylizowane fakty
3. Teoria portfelowa
4. Miary ryzyka portfela
5. Pomiar grubości ogona
6. Krótki przegląd literatury



Badania empiryczne – Eom et al. (2021)

Eom, C., Kaizoji, T., Livan, G., & Scalas, E. (2021). **Limitations of portfolio diversification through fat tails of the return distributions: Some empirical evidence:** North American Journal of Economics and Finance. North American Journal of Economics and Finance, 56.





Badania empiryczne – Eom et al. (2021)

Jak dywersyfikacja portfela wpływa na:

- redukcję grubości ogonów rozkładu stóp zwrotu z portfela,
- asymetrię dolnego i górnego ogona rozkładu stóp zwrotu z portfela.

Charakterystyka badania empirycznego:

- dzienne stopy zwrotu,
- akcje wchodzące w skład indeksów na rynku azjatyckim (chińskim, tajwańskim, japońskim i koreańskim).

Pytania bez odpowiedzi:

- jak zmieniają się zależności w przypadku np. tygodniowych i miesięcznych stóp zwrotu?
- czy podobne efekty występują również na rynkach europejskim i amerykańskim?
- czy wnioski będą takie same, jeśli zastosowany zostanie inny sposób budowy portfela lub inny sposób pomiaru grubości ogona?



Rozkłady bezwarunkowe stóp zwrotu

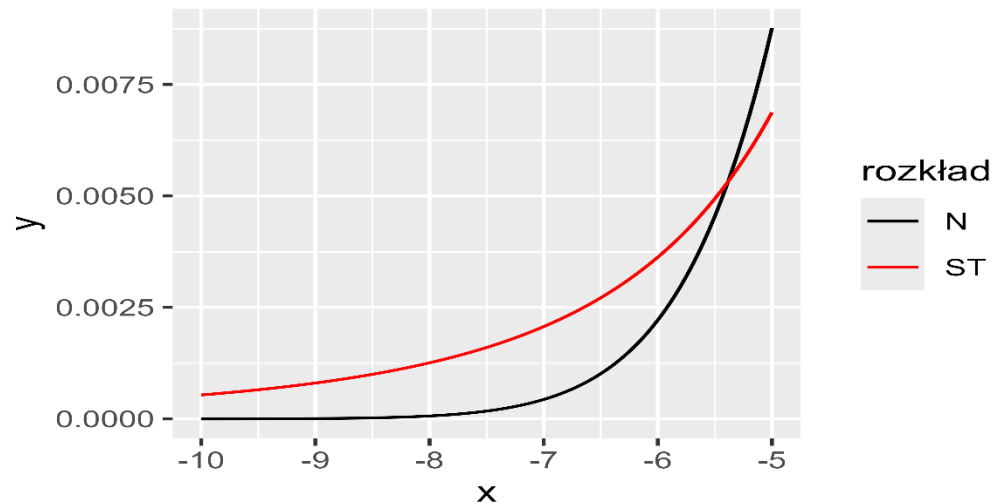
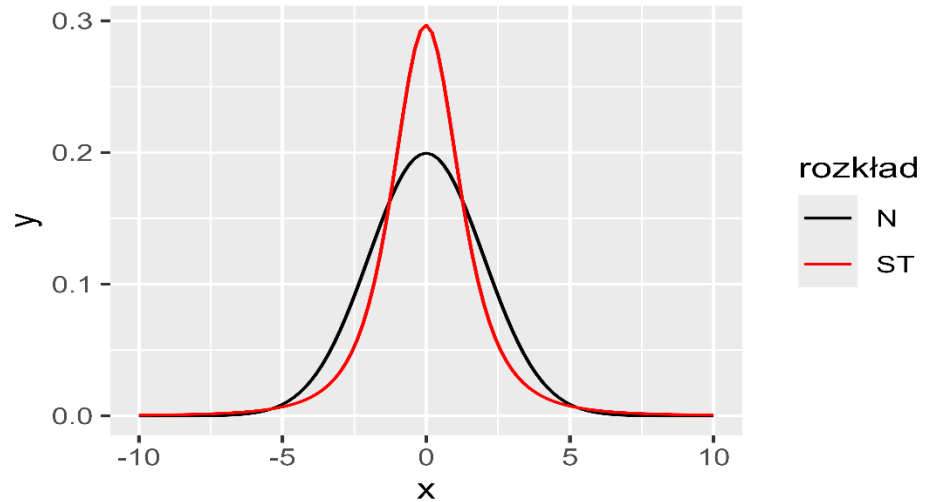
- Bachelier (1900)

Zgodnie z Centralnym Twierdzeniem Granicznym rozkłady stóp zwrotu w długim okresie czasu powinny mieć rozkład normalny (dotyczy to danych dziennych, tygodniowych i miesięcznych).

- Mandelbrot (1963), Fama (1965)
Badania empiryczne potwierdzają, że rozkłady stóp zwrotu częstszych niż miesięczne, posiadają grube ogony.

Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices: The Journal of Business. The Journal of Business, 38(1), 34–105.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices: The Journal of Business. The Journal of Business, 36(4), 394–419.





Stylizowane fakty

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues: Quantitative Finance. Quantitative Finance, 1(2), 223–236.

- **Grube ogony i leptokurtyczność rozkładów bezwarunkowych.**
Rozkłady stóp zwrotu (dziennych lub częstszych) mają grubsze ogony i wyższą kurtozę niż rozkład normalny.
- **Dążenie do rozkładu normalnego przy zwiększaniu jednostki czasu.**
Im mniejsza częstotliwość obliczania stóp zwrotu, tym bardziej kształt rozkładu zbliża się do rozkładu normalnego.
- **Asymetria wzrostów i spadków.**
Ujemne zwroty co do wartości bezwzględnej są wyższe niż dodatnie wzrosty.

Inne:

- Grupowanie zmienności.
- Grube ogony rozkładów warunkowych.
- Autokorelacja bezwzględnych zwrotów.
-



Portfele

Etapy tworzenia portfela:

- Wybór aktywów.
- Ustalenie procentowego udziału poszczególnych aktywów w portelu.

W jaki sposób można ustalić udziały poszczególnych aktywów?

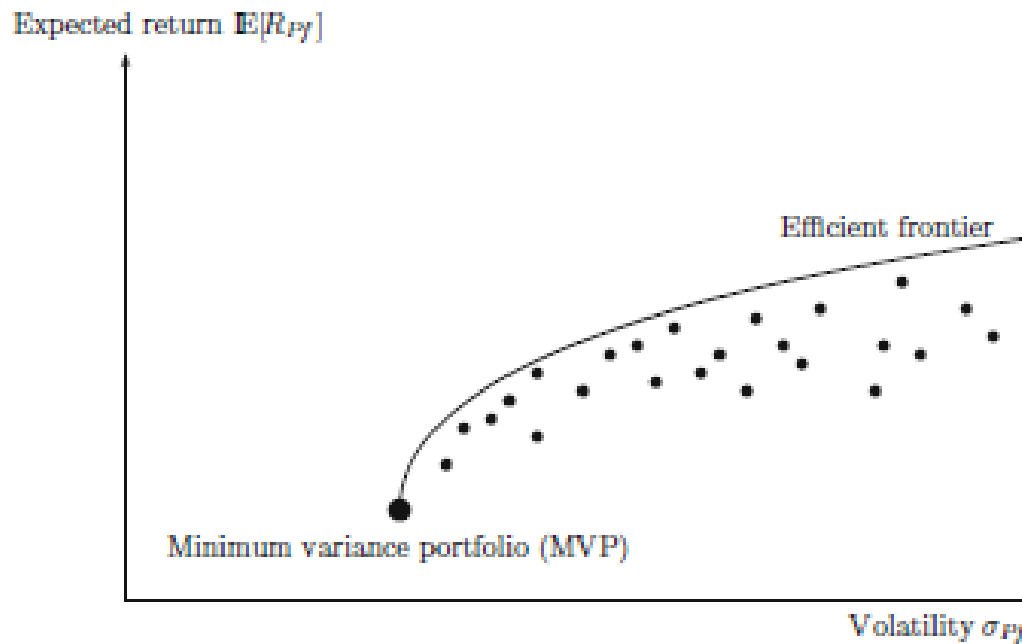
- Portfel o równych udziałach $1/N$.
- Nowoczesna teoria portfelowa (Markowitz, 1952)



Nowoczesna teoria portfelowa

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection: Journal of Finance (Wiley-Blackwell). Journal of Finance (Wiley-Blackwell), 7(1), 77–91.

- Opiera się na stopach zwrotu i wybranej mierze ryzyka



Źródło: Schulmerich, M. (2014). *Applied asset and risk management: A guide to modern portfolio management and behavior-driven markets* /. Springer.



Nowoczesna teoria portfelowa

Portfel o minimalnej wariancji:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

gdzie:

n – liczba akcji

w_i - udział i -tej akcji w portfelu, $i = 1, \dots, n$

σ_{ij} – kowariancja pomiędzy stopami zwrotu z akcji i oraz j

Portfel o minimalnej wariancji i równych udziałach:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = m$$

$$w_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$$

gdzie:

n – liczba akcji

m – liczba akcji w portfelu

w_i - udział i -tej akcji w portfelu, $i = 1, \dots, n$

σ_{ij} – kowariancja pomiędzy stopami zwrotu z akcji i oraz j



Miary ryzyka portfela

- Pojęcie ryzyka
niepewność mierzalna i niemierzalna (Knight, 1921)
- Podział ryzyka
 - kredytowe
 - płynności
 - operacyjne
 - rynkowe

 - systematyczne
 - niesystematyczne
- Miary ryzyka
 - Miary zmienności (np. odchylenie standardowe)
 - Miary wrażliwości
 - Miary zagrożenia (np. VaR, ES)



Miary ryzyka portfela – Eom et al. (2021)

- Odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}$$

r_t - logarymiczna procentowa stopa zwrotu w okresie t

\bar{r} - średnia logarymiczna procentowa stopa zwrotu

n - liczba obserwacji



Miary ryzyka portfela – miary zagrożenia

- Semiodchylenie standardowe (ujemne)

$$s\sigma^- = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (d_t^-)^2}$$

$$d_t^- = \begin{cases} 0 & r_t \geq \bar{r} \\ r_t - \bar{r} & r_t < \bar{r} \end{cases}$$

r_t - logarytmiczna procentowa stopa zwrotu w okresie t

\bar{r} - średnia logarytmiczna procentowa stopa zwrotu

n - liczba obserwacji

- Wartość zagrożona (*Value at Risk, VaR*)

$$VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha)$$

α - rząd kwantyla, $0 \leq \alpha \leq 1$

F^{-1} - funkcja odwrotna do dystrybuanty stóp zwrotu

X - zmienna losowa reprezentująca stopy zwrotu

- Oczekiwany niedobór (*Expected Shortfall, ES*)

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\gamma(X) d\gamma$$



Pomiar grubości ogona – Eom et al. (2021)

Eom et al.:

- Estymator Hilla (Hill estimator, HE)

Hill, B. M. (1975). A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution: The Annals of Statistics. The Annals of Statistics, 3(5), 1163–1174.

- Ryzyko ogona (tail risk, TR)

Kelly, B., & Jiang, H. (2014). Tail Risk and Asset Prices: Review of Financial Studies. Review of Financial Studies, 27(10), 2841–2871.

- Grubość ogona (tail fatness, TF)

Eom, C., Kaizoji, T., Livan, G., & Scalas, E. (2021). **Limitations of portfolio diversification through fat tails of the return distributions: Some empirical evidence**: North American Journal of Economics and Finance. North American Journal of Economics and Finance, 56.

$$TF^{(-)} = \frac{f_x^{(-)}}{f_T}, \text{ where } f_x^{(-)} = f(x_z \leq -2.58)$$



$$TF^{(+)} = \frac{f_x^{(+)}}{f_T}, \text{ where } f_x^{(+)} = f(x_z \geq +2.58)$$



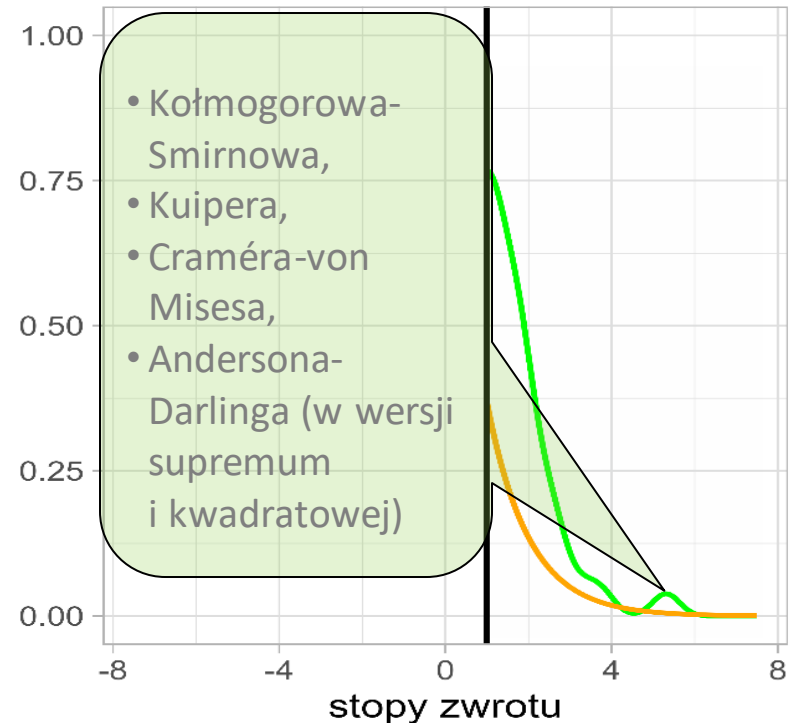
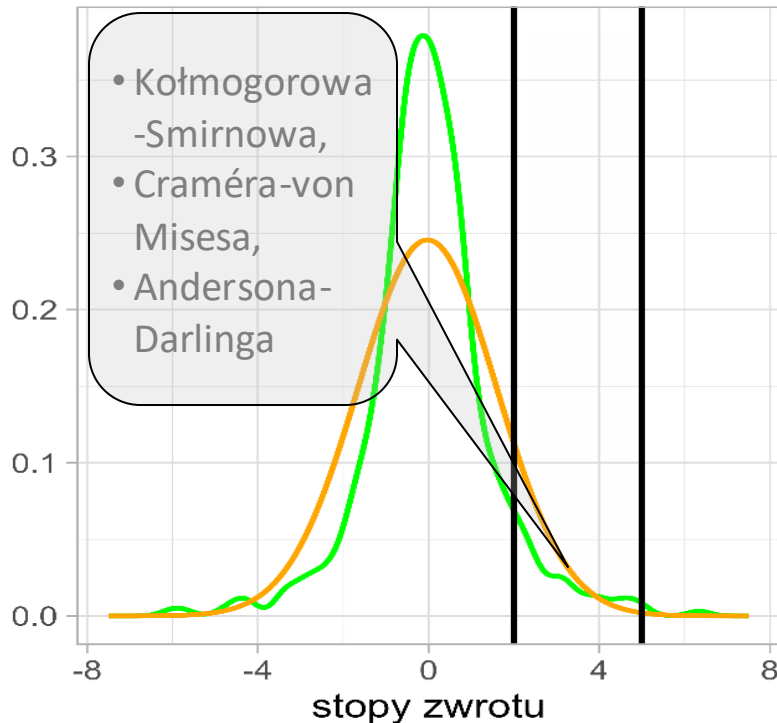
Pomiar grubości ogona – testy zgodności dla rozkładów uciętych

Liczba uciętych danych jest
znana

Liczba uciętych danych nie jest
znana

 rozkład empiryczny  rozkład normalny

 rozkład empiryczny  rozkład wykładniczy





Pomiar grubości ogona – testy zgodności dla rozkładów uciętych

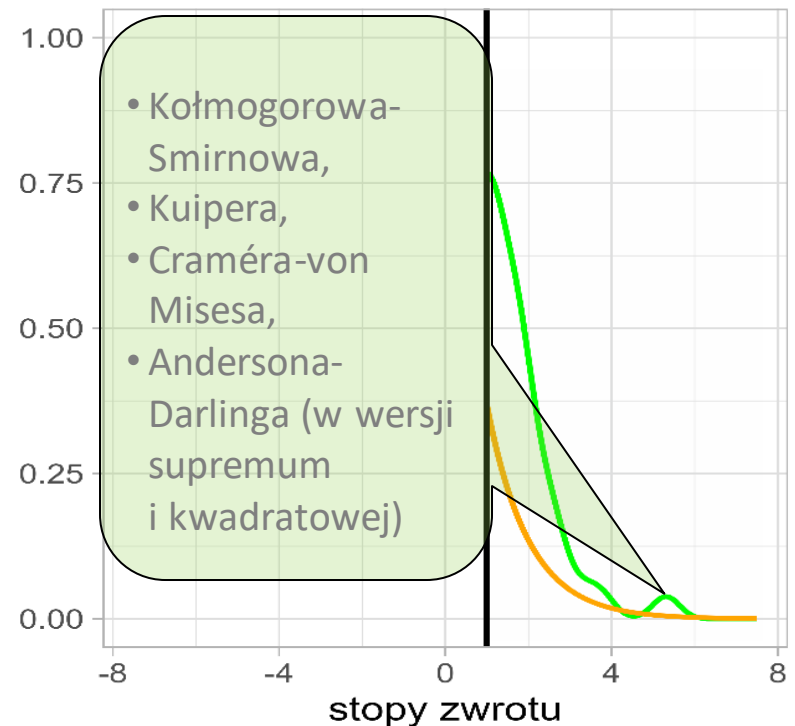
Chernobai, A., Rachev, S. i Fabozzi, F. (2015). Composite goodness-of-fit tests for left truncated loss samples. W: C. Lee i J. Lee (Eds.), *Handbook of Financial Econometrics and Statistics* (s. 575-596). New York: Springer.

Echaust, K. i Lach, A. (2017). Goodness-of-fit tests for truncated distributions. 35th International Conference Mathematical Methods in Economics: Conference Proceedings.

Lach, A. i Smaga, Ł. (2018). Comparison of the goodness-of-fit tests for truncated distributions. *Przegląd Statystyczny*, 65(3), 296–313.

Liczba uciętych danych nie jest znana

 rozkład empiryczny  rozkład wykładniczy



Statystyka	Wzór statystyki i formuła obliczeniowa
Kolmogorowa-Smirnowa	$KS^{**} = \sqrt{n} \sup_x F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x) $ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $KS^{**} = \frac{\sqrt{n}}{z_{H2} - z_{H1}} \max \left\{ \sup_j \left\{ z_{H1} + \frac{j}{n} (z_{H2} - z_{H1}) - z_j \right\}, \sup_j \left\{ z_j - \left(z_{H1} + \frac{j-1}{n} (z_{H2} - z_{H1}) \right) \right\} \right\}$
Kuipera	$V^{**} = \sqrt{n} \left(\sup_x \{F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x)\} + \sup_x \{\hat{F}_0^{**}(x) - F_n(x)\} \right)$ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $V^{**} = \frac{\sqrt{n}}{z_{H2} - z_{H1}} \left(\sup_j \left\{ z_{H1} + \frac{j}{n} (z_{H2} - z_{H1}) - z_j \right\} + \sup_j \left\{ z_j - \left(z_{H1} + \frac{j-1}{n} (z_{H2} - z_{H1}) \right) \right\} \right)$
Andersona-Darlinga (wersja supremum)	$AD^{**} = \sqrt{n} \sup_x \left \frac{F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x)}{\sqrt{\hat{F}_0^{**}(x)(1 - \hat{F}_0^{**}(x))}} \right $ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD^{**} = \sqrt{n} \max \left\{ \sup_j \left\{ \frac{z_{H1} + \frac{j}{n} (z_{H2} - z_{H1}) - z_j}{\sqrt{(z_j - z_{H1})(z_{H2} - z_j)}} \right\}, \sup_j \left\{ \frac{z_j - \left(z_{H1} + \frac{j-1}{n} (z_{H2} - z_{H1}) \right)}{\sqrt{(z_j - z_{H1})(z_{H2} - z_j)}} \right\} \right\}$
Andersona-Darlinga (wersja supremum dla ogona górnego z funkcją wagową $f(x)=1/(1-x)$)	$AD_{up}^{**} = \sqrt{n} \sup_x \left \frac{F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x)}{1 - \hat{F}_0^{**}(x)} \right $ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD_{up}^{**} = \sqrt{n} \max \left\{ \sup_j \left\{ \frac{z_{H1} + \frac{j}{n} (z_{H2} - z_{H1}) - z_j}{z_{H2} - z_j} \right\}, \sup_j \left\{ \frac{z_j - \left(z_{H1} + \frac{j-1}{n} (z_{H2} - z_{H1}) \right)}{z_{H2} - z_j} \right\} \right\}$
Andersona-Darlinga (wersja supremum dla ogona dolnego z funkcją wagową $f(x)=1/(x)$)	$AD_{down}^{**} = \sqrt{n} \sup_x \left \frac{F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x)}{\hat{F}_0^{**}(x)} \right $ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD_{down}^{**} = \sqrt{n} \max \left\{ \sup_j \left\{ \frac{z_{H1} + \frac{j}{n} (z_{H2} - z_{H1}) - z_j}{z_j - z_{H1}} \right\}, \sup_j \left\{ \frac{z_j - \left(z_{H1} + \frac{j-1}{n} (z_{H2} - z_{H1}) \right)}{z_j - z_{H1}} \right\} \right\}$

Statystyka	Wzór statystyki i formuła obliczeniowa
Andersona-Darlinga (wersja kwadratowa)	$AD^{2**} = n \int_{H_1}^{H_2} \frac{(F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x))^2}{F_0^{**}(x)(1 - F_0^{**}(x))} d\hat{F}_0^{**}(x)$ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD^{2**} = -n + 2n \ln(z_{H_2} - z_{H_1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - 2j) \ln(z_j - z_{H_1}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 + 2(n - j)) \ln(z_{H_2} - z_j)$
Craméra-von Misesa	$W^{2**} = n \int_{H_1}^{H_2} (F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x))^2 d\hat{F}_0^{**}(x)$ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $W^{2**} = \frac{n}{3} + \frac{n z_{H_1}}{(z_{H_2} - z_{H_1})} + \frac{1}{n(z_{H_2} - z_{H_1})} \sum_{j=1}^n (1 - 2j) z_j + \frac{1}{(z_{H_2} - z_{H_1})^2} \left(\sum_{j=1}^n (z_j - z_{H_1})^2 \right)$
Andersona-Darlinga (wersja kwadratowa dla ogona górnego z funkcją wagową $f(x)=1/(1-x)$)	$AD_{up}^{**} = n \int_{H_1}^{H_2} \frac{(F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x))^2}{(1 - F_0^{**}(x))^2} d\hat{F}_0^{**}(x)$ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD_{up}^{**} = -2n \ln(z_{H_2} - z_{H_1}) + 2 \sum_{j=1}^n \ln(z_{H_2} - z_j) + \frac{(z_{H_2} - z_{H_1})}{n} \sum_{j=1}^n (1 + 2(n - j)) \frac{1}{z_{H_2} - z_j}$
Andersona-Darlinga (wersja kwadratowa dla ogona górnego z funkcją wagową $f(x)=1/x$)	$AD_{down}^{**} = n \int_{H_1}^{H_2} \frac{(F_n(x) - \hat{F}_0^{**}(x))^2}{(F_0^{**}(x))^2} d\hat{F}_0^{**}(x)$ <p>Formuła obliczeniowa:</p> $AD_{down}^{**} = -2n \ln(z_{H_2} - z_{H_1}) + 2 \sum_{j=1}^n \ln(z_j - z_{H_1}) + \frac{(z_{H_2} - z_{H_1})}{n} \sum_{j=1}^n (1 - 2j) \frac{1}{z_{H_1} - z_j}$



Wartości progów ucięcia	Fragment dystrybuanty
$z_{H1} > 0$ oraz $z_{H2} = 1$	rozkład lewostronnie ucięty
$z_{H1} = 0$ oraz $z_{H2} < 1$	rozkład prawostronnie ucięty
$z_{H1} > 0$ oraz $z_{H2} < 1$	rozkład obustronnie ucięty
$z_{H1} = 0$ oraz $z_{H2} = 1$	cały rozkład



z_{H1} - dolny próg ucięcia

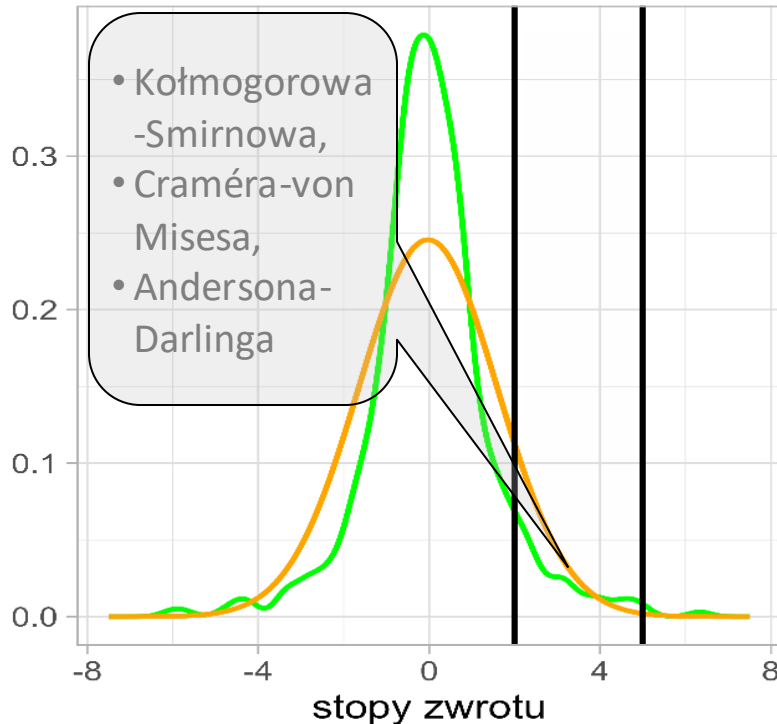
z_{H2} - górny próg ucięcia



Pomiar grubości ogona – testy zgodności dla rozkładów uciętych

Liczba uciętych danych jest
znana

 rozkład empiryczny  rozkład normalny



Lp.	Opracowanie procedury wnioskowania statystycznego uwzględniającą liczbę uciętych danych
1.	Dla danej n-elementowej próby (...): a) oszacuj parametry całego rozkładu, b) oblicz wartość statystyki testowej T_0 dla rozkładu obustronnie uciętego.
2.	Pobierz n-elementową próbę z rozkładu oszacowanego w punkcie 1. Na podstawie wylosowanej próby: a) oszacuj parametry całego rozkładu, b) oblicz wartość statystyki testowej T_i dla rozkładu obustronnie uciętego.
3.	Powtórz B-krotnie punkt 2. (...) oszacuj rozkład statystyki testowej pod warunkiem prawdziwości hipotezy zerowej.
4.	Oblicz wartość \hat{p} .
5.	Wyznacz poziom istotności α .
6.	Odrzuć H_0 , jeśli \hat{p} jest mniejsza od zadanego poziomu istotności α .



Pomiar grubości ogona – testy zgodności dla rozkładów uciętych

Weryfikowany układ hipotez:

$$H_0: F = F_0^{**}$$

$$H_1: F \neq F_0^{**}$$

F - rozkład rzeczywisty

F_0^{**} - rozkład teoretyczny obustronnie ucięty (tu: rozkład normalny)

Poziom istotności: $\alpha = 5\%$



Krótki przegląd literatury

- Borowski, K. (2017). Rozkład normalny stóp zwrotu z akcji wchodzących w skład następujących indeksów giełdowych: WIG20, MWIG40 I SWIG80. *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych*, 18(4), 541–560.
- Borowski, K. (2018a). Normal Distribution of Returns of Warsaw Stock Exchange Indexes. *Problemy Zarządzania*, 2018, 11–45. <https://doi.org/10.7172/1644-9584.74.1>
- Borowski, K. (2018b). Testing 65 Equity Indexes for Normal Distribution of Returns. *Journal of Economics and Management*, 34, 5–38. <https://doi.org/10.22367/jem.2018.34.01>
- Dudzińska-Baryła, R., Donata, K.-B., & Michalska, E. (2017). The structure of efficient portfolios in mean-variance-skewness models. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Finanse Rynki Finansowe Ubezpieczenia*, 2, 185–196. <https://doi.org/10.18276/frfu.2017.86-15>
- Jamroz, P., & Koronkiewicz, G. (2016). Różnice w ogonach stóp zwrotu indeksów wybranych europejskich giełd (Differences between the Tails of Stock Market Returns of Selected European Stock-Markets) (SSRN Scholarly Paper 2871618). <https://papers.ssrn.com/abstract=2871618>
- Koronkiewicz, G., & Jamroz, P. (2014). Comparison of the Tails of Market Return Distributions (SSRN Scholarly Paper 2873880). <https://papers.ssrn.com/abstract=2873880>
- Krężolek, D. (2015). Weryfikacja testów zgodności na rynku metali szlachetnych. *Studia Ekonomiczne*, 219, 53–64.
- Piasecki, K., & Tomasiak, E. (2013). Rozkłady stóp zwrotu z instrumentów polskiego rynku kapitałowego (Czytelnia : Księgozbiór podstawowy (książki) 356492). Wydawnictwo edu-Libri.



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W POZNANIU

Dziękuję za uwagę